

Влюбените бръмбари

В последно време в състезанията по информатика се наблюдава интересна аномалия – лека „физична“ нотка. Това може да се дължи отчасти на желанието на авторите за оригиналност, състояща се в практическо приложение на задачата (задачи, взаимствани от природата), и отчасти на Пешо ☺, който дава само такива задачи.

Най-добрият начин за информатиците да „поддържат темпото“ е, като се „преквалифицират“.

Задачата за влюбените бръмбари не е нова, всъщност е много стара, но от опит знам, че не е и много известна. Последната ми среща с нея беше на отборно състезание по информатика, където повечето хора не успяха да я решат.

Задачата е следната:

Имаме 4 бръмбара, намиращи се във върховете на квадрат със страна a . Всеки бръмбар започва да върви със постоянна скорост v към десния си съсед, като се движи така, че във всеки момент десният му съсед е точно срещу него (посоката на скоростта му сочи към съседа). Четирите бръмбара се срещат в центъра на квадрата. Пита се – какво разстояние е изминал всеки от тях?

Въпреки че отговора е изненадващо прост, въобще не е лесно да се стигне до задоволително решение. Понеже това е чист физически въпрос, за решението му ще използваме „физични“ средства – в случая концепцията за инфинитезесмалните (безкрайно малките промени).

Идеята е следната: за малък интервал от време dt , един от бръмбарите изминава траектория, толкова близка до права линия, че можем да пренебрегнем отклонението. Това е защото нормалната компонента на „ускорението“ е пренебрежимо малка спрямо a . Също така, ако разгледаме дотатъчно малък период от време, „оставащото“ разстояние между два бръмбара в края на периода, като хипотенуза на триъгълник с пренебрежимо малък катет, е близко до това оставащо разстояние, ако бръмбара се бе движил по права линия.

Формално, тези наблюдения се записват в системи уравнения, наречени диференциални (в нашия случай диференциалното уравнение означава, че се отнася за много малък период от време).

Нека $l(t)$ е разстоянието, изминато от всеки от бръмбарите за време t след началото, а $h(t)$ е разстоянието между два съседни бръмбара в момент t след началото. Нека бръмбарите се срещат в момент t_1 . Тогава:

$x = l(t_1)$ – разстоянието, което търсим в задачата

$l(0) = 0, h(0) = a, h(t_1) = 0$ – начални условия

$h(t) - h(t + dt) = vdt$ – заради пренебрежимия катет в правоъгълен триъгълник

$$-h'(t)dt = vdt$$

$$h'(t)dt = -vdt$$

$$h(t) = - \int vdt + C = -vt + C, C \text{ определяме от началните условия}$$

$$h(0) = a = -v \cdot 0 + C \rightarrow C = a$$

$$\boxed{h(t) = a - vt}$$

Сега определяме времето:

$$h(t_1) = a - vt_1 = 0, t_1 = \frac{a}{v};$$

Понеже бръмбарите се движат със константна скорост:

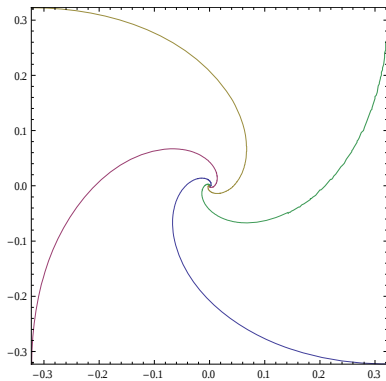
$$l(t) = vt.$$

Оттук:

$$\boxed{x = l(t_1) = a}$$

Това е интересен, красив и доста противен на логиката факт: бръмбарите изминават разстояние колкото страната на квадрата и то не зависи от скоростта им!

За тези, които искат да научат още повече – траекторията на всеки бръмбар е крива, известна като експоненциална спирала, с просто параметрично уравнение в полярни координати.



Картинката е генерирана със следния код на *Mathematica*:

```
k=0.31;
PolarPlot[{E^t, E^(t+Pi/2), E^(t+2Pi/2), E^(t+3Pi/2)}, {t, -4Pi, 2Pi}, Axes->False, Frame->True, PlotRange->{{-k, k}, {-k, k}}]
```