

Върху „сложната“ задача на Пеев

В една от лекциите на лагер-школата по информатика в Хасково, 2009г., г-н. Пеев предложи няколко задачи, в които трябваше да се сетим по нещо, за да можем въобще да ги решим. Повечето ключови аргументи бяха от математическо естество – например чрез логаритмуване да превърнем мултипликативна задача в адитивна и други такива. Последната задача се оказа много интересна. Представям ви я в синтезиран вид:

Задача: Да се изведе n -тото число, непредставимо във вида $x + 2xy + y$, където x, y са естествени числа.

Интересното беше че тогава не се сетихме кои точно са всъщност тези числа и евентуално ги намерихме в OEIS, където беше дадена формула за тях.

Тогава всички си мислехме, че доказването на теоремата би било доста сложно математически и дори се говореше за доказателство на 9-10 страници.

Причината, поради която пиша тази статия е, че всъщност тази задача и подобни на нея са доста лесно решими и не изискват големи знания по теория на числата.

Ето теоремата и доказателството:

Теорема: Единствените числа, които не са представими във вида $x + 2xy + y$, където x, y са естествени, са числата $\frac{p-1}{2}$, където p е нечетно просто число.

Доказателство:

Нека:

$$u = x + 2xy + y.$$

Тогава:

$$2u = 2x + 4xy + 2y,$$

$$2u + 1 = 2x + 4xy + 2y + 1 = (2x + 1)(2y + 1).$$

Това показва, че ако числото $2u + 1$ има нетривиален делител, по-голям от 2, то u е представимо. Сега единствените нечетни числа, които нямат нетривиален делител, по-голям от 2, са нечетните прости числа. Тогава, ако $2u + 1$ е нечетно просто число, то u не е представимо.

Този подход може да се използва и при различни коефициенти на бинарната форма като се избере подходяща трансформация, която трансформира формата в разложима.